

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ. ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

Компьютерное моделирование различных физических процессов часто связано с построением математической модели, представляющей собой систему дифференциальных уравнений, и последующем численном решении этих уравнений. Следует помнить, что любая модель некоторого реального явления имеет границы применимости. Иногда эти границы достаточно очевидны и изначально учитываются при формулировке модели. Однако в ряде случаев эти границы обнаруживаются лишь при доскональном исследовании полученных численных решений.

Вместе с тем, в процессе численного решения уравнений могут выявляться некоторые качественные особенности, не присущие, казалось бы, исходной системе, например, периодичность решений. Чтобы понять эти особенности необходим качественный анализ уравнений, при котором устанавливаются основные закономерности изучаемого явления без явного решения описывающего его уравнения. Фактически именно на этом уровне изучения физики

может в полной мере реализовываться указание Фейнмана о путях развития физического мышления, связанное с качественным анализом уравнений [1].

В данной статье мы опишем исследование модели механической системы, представляющей собой разновидность машины Атвуда в нестандартных условиях, когда движение одного из грузов происходит не по вертикали, а по спиральным траекториям, обусловленным спецификой начальных условий [2–4]. Данный пример очень удачно иллюстрирует возможность качественного исследования поведения системы, сопровождающегося существенным упрощением исходной системы уравнений, с последующей проверкой получающихся результатов путем численного решения точных уравнений математической модели явления.

Тяжелое тело массы M подвешивается на прочной нерастяжимой струне непосредственно у блока, выполненного в виде горизонтальной оси, через которую перекинута струна таким образом, что она может оборачиваться вокруг этой оси. Легкое тело массы m ($\frac{M}{m} \approx 50$), прикрепленное к другому концу струны, отводится до горизонтального положения и отпускается. Длина струны составляет $r_0 \approx 1$ м, как и высота горизонтальной оси над полом.

На рисунке 1 изображено начальное состояние системы (а) и состояние в некоторый момент времени, когда угол θ между горизонтом и отрезком нити, идущим к легкому грузу, принимает некоторое произвольное значение (b). Ось O , через которую пе-

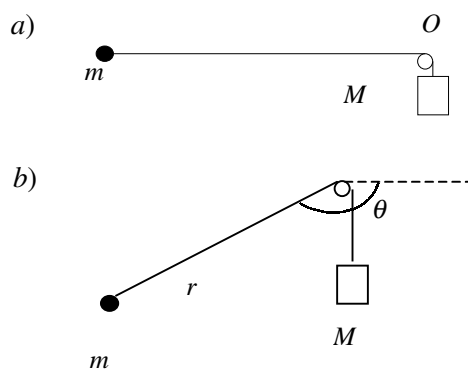


Рисунок 1.

рекинута нить, перпендикулярна плоскости рисунка. Как обычно, положительный угол отсчитывается по часовой стрелке, так что начальный угол равен $-\pi$.

Опыт показывает, что тяжелый груз, падая, не доходит до пола и начинает движение вверх, в то время как струна наворачивается на ось, так что легкий груз вращается по спирали вокруг оси с увеличивающейся угловой скоростью. Как ясно из условия задачи, тяжелый груз может двигаться только по вертикали. Скорость легкого груза можно разложить на две составляющие – вдоль струны и перпендикулярно ей. Вследствие нерастяжимости струны составляющая скорости легкого груза вдоль струны равна скорости тяжелого груза и равна производной \dot{r} .

Составляющая скорости легкого груза, перпендикулярная струне, соответствует его вращению вокруг точки O и равна $r\dot{\theta}$. Поэтому выражение для кинетической энергии системы в переменных r и θ записывается в виде:

$$E_k = \frac{1}{2} [(M + m)\dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2].$$

При расчете потенциальной энергии примем за ноль энергию на уровне оси O . В силу нерастяжимости струны потенциальная энергия в переменных r и θ записывается в виде:

$$E_p = gr(M + m \sin \theta).$$

В результате для сохраняющейся во времени полной энергии получим выражение:

$$E = \frac{1}{2} [(M + m)\dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2] + gr(M + m \sin \theta) = const.$$

Уравнение движения можно получить, дифференцируя выражение для полной энергии системы по времени:

$$(M + m)\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 + mr^2\ddot{\theta} + g(M + m \sin \theta)\dot{r} + mgr \cos \theta \dot{\theta} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины r и θ , поэтому необходимо найти второе независимое уравнение. Для этого удобно использовать закон изменения $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Учитывая, что вклад в векторное произведение даст только составляю-



...движение одного из грузов происходит ... по спиральным траекториям...

щая скорости перпендикулярная струне, для модуля L найдем:

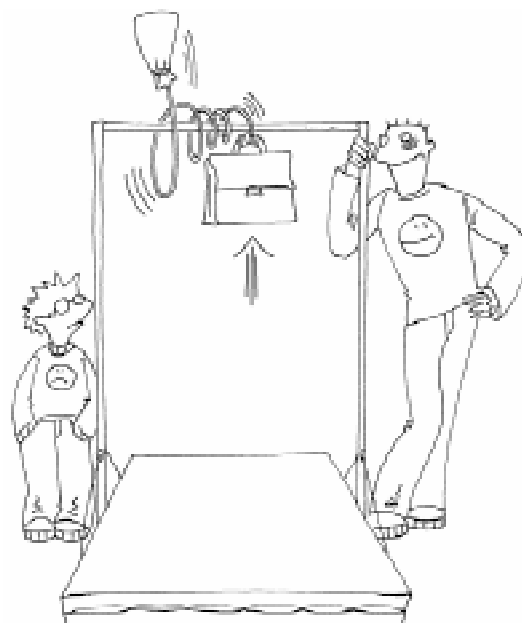
$$L = m r^2 \dot{\theta}.$$

Теперь закон изменения момента импульса записывается в виде:

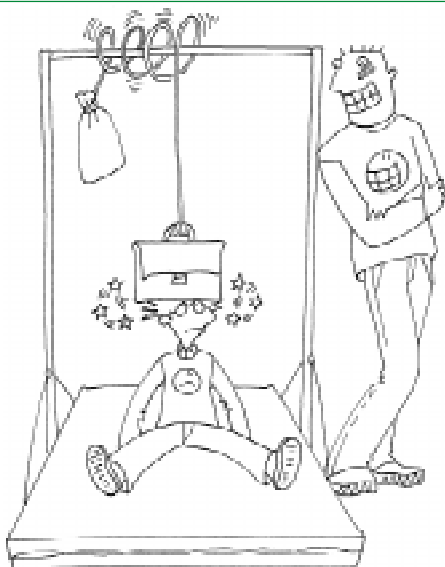
$$r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = -gr \cos \theta. \quad (2)$$

Чтобы упростить уравнение (1) сгруппируем слагаемые в нем следующим образом:

$$(M + m)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\theta}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + g \cos \theta) + g(M + m \sin \theta)\dot{r} = 0.$$



Опыт показывает, что тяжелый груз, падая, не доходит до пола и начинает движение вверх, в то время как струна наворачивается на ось



...геометрические размеры установки позволяют массе M вплотную приблизиться к полу, не касаясь его...

Учитывая равенство (2), приведем последнее уравнение к виду:

$$(M + m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - g(M + m \sin \theta). \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) представляют замкнутую систему дифференциальных уравнений, с помощью которой можно исследовать поведение изучаемой системы.

Качественные соображения, позволяющие существенно упростить систему уравнений (2) и (3), заключаются в следующем. Поскольку $m \ll M$ и угол θ сначала (при большом значении r) меняется медленно, то из уравнения (2) следует

$$\ddot{r} \approx -g, \quad (4)$$

что соответствует режиму «свободного падения» тяжелого груза. Из уравнения (4) немедленно следует следующая зависимость $r(t)$:

$$r(t) \approx r_0 - \frac{g t^2}{2}. \quad (5)$$

Предполагая, что геометрические размеры установки позволяют массе M вплотную приблизиться к полу, не касаясь его, получаем для продолжительности t_1 режима «свободного падения» оценку:

$$t_1 \approx \sqrt{\frac{2r_0}{g}}. \quad (6)$$

При $g = 10 \text{ м/с}^2$, $r_0 = 1 \text{ м}$ находим $t_1 = 0,447 \text{ с}$. Точный численный расчет на основе уравнений (2) и (3) с начальными

условиями $r_0 = 1 \text{ м}$, $\theta_0 = -\pi$ дает значение $t_1 = 0,454 \text{ с}$.

При падении тяжелого груза происходит уменьшение расстояния r от легкого груза до оси почти до нуля, что, вследствие закона сохранения энергии, приводит к увеличению его скорости и резкому увеличению силы натяжения струны вследствие уменьшения радиуса вращения; эта сила становится существенно больше сил тяжести. В результате в уравнении (2) в правой части доминирует первое слагаемое, а в уравнении (3) можно вообще пренебречь правой частью, и система уравнений принимает вид:

$$M\ddot{r} \approx mr\dot{\theta}^2, \quad (7)$$

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} \approx 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что в пренебрежении силами тяжести сохраняется момент импульса. Записывая (8) в виде

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \text{ получаем}$$

$$mr^2\dot{\theta} = L = \text{const}. \quad (9)$$

Учитывая соотношения (9), делая замену переменной $u = 1/r$ и переходя к новой независимой переменной θ , переписываем уравнение (7) в виде:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \omega^2 u = 0, \quad (10)$$

где введено обозначение

$$\omega^2 = \frac{m}{M}. \quad (11)$$

Уравнение (10) – это уравнение гармонических колебаний, решение которого можно записать в виде:

$$r(\theta) \approx \frac{r_1}{\cos(\omega(\theta - \theta_1))}, \quad (12)$$

где θ_1 – угол, при котором $r(\theta)$ достигает своего наименьшего значения r_1 . Естественно, решение (12) справедливо лишь в области значений углов θ , для которых значение косинуса положительно и $r(\theta) < r_0$. Выражение (12) оказывается удивительно точным в весьма широкой области значений угла θ , что свидетельствует о правильности простых качественных соображений, приводящих к уравнениям (7) и (8). Обо-

значим через θ_i «начальное» значение угла θ , при котором начинается режим быстрого вращения легкого груза вокруг оси с непрерывно уменьшающимся радиусом. Поскольку, очевидно, $r(\theta_i) \ll r_1$, то справедливо приближенное равенство:

$$\omega(\theta_i - \theta_1) \approx -\frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Через θ_f обозначим «конечный» угол θ , при котором режим вращения заканчивается. Очевидно, что опять $r(\theta_f) \gg r_1$, и, следовательно:

$$\omega(\theta_f - \theta_1) \approx \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

Вычитая почленно (13) из (14), получаем область изменения угла θ , соответствующую режиму вращения легкого груза

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \approx \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{M}{m}}. \quad (15)$$

На рисунках 2–3 приведены результаты численных расчетов величин $r(\theta)$, $r(t)$ и $\theta(t)$, выполненных на основе точных уравнений (2) и (3).

Расчеты выполнены для случая $M/m = 50$. На верхнем графике (рисунок 1), помимо численно рассчитанной кривой $r(t)$, приведена также парабола, определяемая уравнением (5), которая до значения $r = r_{\min}$ практически совпадает с кривой численного расчета. На среднем графике (рисунок 2) приведена кривая $\theta(t)$, значения для наглядности приведены в единицах π . Смысл кривой, изображенной на нижнем графике, мы обсудим далее.

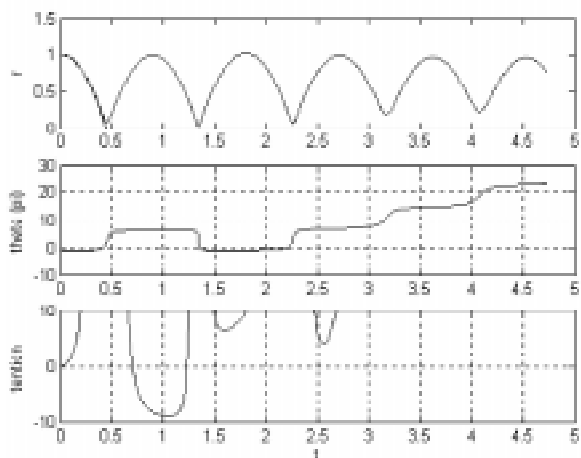


Рисунок 2.

На рисунке 2 верхний график – результат численного расчета кривой $r(\theta)$, а нижний соответствует кривой, полученной из уравнения (12). Как видно из графиков, результаты приближенного аналитического расчета достаточно хорошо согласуются с численными результатами.

В рамках проводимого качественного анализа системы можно найти величину r_1 , заметив, что момент импульса L системы равен интегралу по времени от гравитационного вращательного момента N за время «свободного падения» тяжелого груза. Учитывая, что с хорошей точностью можно положить

$$N \approx mgr, \quad (16)$$

с помощью (5) и (6) находим:

$$l = \int_0^{t_1} N(t) dt \approx m g \int_0^{t_1} \left(r_0 - \frac{gt^2}{2} \right) dt = \frac{m}{3} \sqrt{(2r_0)^3 g} \quad (17)$$

В точке $r = r_1$, где $\dot{r} = 0$ и доминирует кинетическая энергия вращения, с помощью уравнения (3) получаем:

$$\dot{\theta}_1 \approx \sqrt{\frac{2Mgr_0}{mr_1^2}}, \quad (18)$$

откуда для момента импульса L с помощью (9) имеем:

$$L \approx r_1 \sqrt{2mMgr_0} \quad (19)$$

С учетом (19) выражение (17) приводит к результату $r_1 = 9,43$ см, в то время как точный численный расчет дает значение

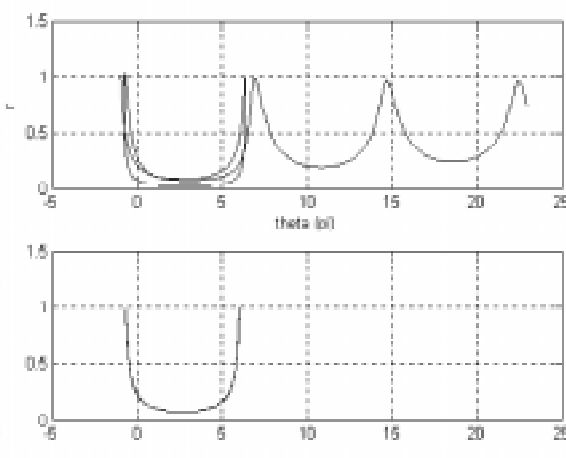
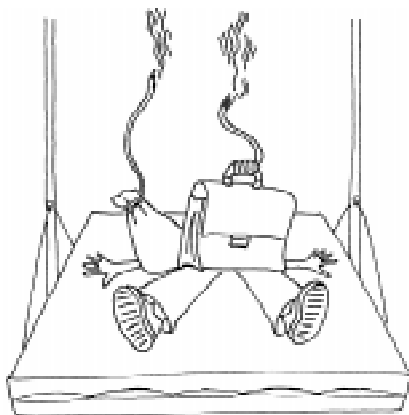


Рисунок 3.

$r_1 = 8,46$ см. Точность приведенного качественного рассмотрения, как и следовало ожидать, увеличивается с ростом отношения M/m . Например, для большего значения отношения $M/m = 200$ уравнение (6) по-прежнему дает значение $t_1 = 0,447$ с, а точный численный расчет приводит к результату $t_1 = 0,449$ с.

Полученные результаты не означают окончания исследования предложенной физической модели системы, поскольку прямо указывают на некоторые моменты, которые могут повлиять на границы ее применимости. Отметим еще раз, что точный численный расчет основан на использовании уравнений (2) и (3), при составлении которых молчаливо предполагалось, что струна, связывающая грузы, все время остается натянутой. Однако, после того, как тяжелый груз останавливается и начинает подниматься вверх, скорость вращения легкого груза убывает, а длина r увеличивается. Поэтому можно ожидать, что в одном из положений, когда легкий груз находится выше оси, натяжение нити может обратиться в нуль. В этот момент легкий груз начнет двигаться по параболе в поле тяжести земли, а уравнения (2) и (3) перестанут соответствовать физике происходящего процесса до тех пор, пока струна, прикрепленная к легкому грузу, снова не натянется. Обращение натяжения струны в нуль происходит при выполнении условия:

$$\dot{\theta}^2 r \leq g \sin \theta. \quad (20)$$



...идея о возможности обращения в нуль силы натяжения струны и резкого возрастания силы трения.

Из этого неравенства видно, что если в какой-то момент времени t_c угловая скорость изменяет направление, то есть $\dot{\theta}(t_c) = 0$, то условие будет выполнено, если в этот момент времени легкий груз находится выше оси, то есть при $\sin \theta(t_c) > 0$.

Ситуация здесь совершенно аналогична той, с которой мы сталкиваемся в аналогичных элементарных задачах (см. задача 3.3.17 из [5]).

Реализуется ли неравенство (20), может показать только численный расчет. Результаты такого расчета приведены на нижнем графике рисунка 2, где изображена зависимость силы натяжения нити от времени при $m = 1$, $M = 50$ (фактически вычисляется величина $\dot{\theta}^2 r - g \sin \theta$). Поскольку при достижении минимального значения r (приблизительно при $t = 1,34$ с) сила натяжения достигает огромной величины (приблизительно $1,76 \cdot 10^6$ Н), масштаб по вертикальной оси ограничен, чтобы был виден переход через нулевое значение. Как видно из графика, при $t \approx 0,71$ с значение силы натяжения становится отрицательным. Это означает, что при $t = t_c \approx 0,71$ с нить ослабнет. Расчет показывает, что это достигается не при любом значении отношения M/m . В частности, это имеет место при $M/m \in [45, 145]$. При $M/m = 40$ и $M/m = 150$ нить не ослабевает. Но при $M/m = 220$ снова появляется момент, когда условие (20) выполняется.

Данный пример наглядно иллюстрирует то обстоятельство, что математическая модель явления (уравнения (2) и (3)) формально справедлива в более широкой области изменения переменных, чем физическая модель, устанавливающая не формальную математическую область справедливости уравнений, а определяющая физические причины ограничения этой области. Модель, основанная на уравнениях (2) и (3), была бы справедливой все время (в пренебрежении трением!), если бы струна была подобна твердому стержню не только при растягивающих ее силах, но и при сжимающих.

Далее следует отметить, что пренебрежение трением справедливо только в условиях, пока струна не сделает несколько оборотов вокруг оси, наматываясь на нее.

Поскольку сила трения возрастает пропорционально $T(\exp(m \Delta j) - 1)$, где m – коэффициент трения, Δj – угол, на который нить обернута вокруг оси, а T – сила натяжения нити, то, когда значение $m \Delta j$ по порядку величины приближается к единице, наблюдаемая картина движения будет существенно отличаться от полученной на основе уравнений (2) и (3): струна может перестать проскальзывать по оси, после чего тяжелый груз остановится.

Умение «увидеть» перечисленные обстоятельства и правильно оценить их влияние на картину движения также характеризует степень парадоксальности мышления. Обратим внимание на стиль рассуждений, который может приводить к выводу о необходимости учета этих факторов: как только в рамках исходной идеализированной модели (2) и (3) получается вывод о «накручивании» струны на ось, сразу должна возникнуть идея о возможности обращения в нуль силы натяжения струны и резкого возрастания силы трения.

Оценивая в целом эффективность приведенного качественного анализа системы,

следует отметить, что основу этого анализа составляют точные уравнения движения (2) и (3) в рамках модели нерастяжимой невесомой струны в пренебрежении трением. Именно на такой подход следует ориентировать обучаемых в случаях, когда ответ не может быть найден из каких-либо общих соображений, вообще без выписывания уравнений движения. Если уж приходится обращаться к уравнениям, то это должны быть точные уравнения, получаемые в рамках определенной физической модели. Далее наступает рекомендуемый Фейнманом этап исследования уравнений, где парадоксальность мышления может проявляться в умении найти критерии, которые позволили бы либо найти возможность физической интерпретации исходных точных уравнений, либо определить разумные приближения, приводящие к существенному упрощению исходных уравнений на основе правдоподобных физических соображений. Наиболее предпочтительной является ситуация, когда эти соображения подтверждаются численными оценками фигурирующих параметров изучаемой системы.

Литература

1. *Feynman R. P.* Pleasure of Finding Things Ont. Perseus Publ., 1999.
2. *Tufillaro N.* Jutegrable motion of a suinging Atwood s machine. Amer. Journ. Phys, 1986. V. 54. P. 142–143.
3. *Tufillaro N., Nunes A., Casasayas J.* Unbounded orbits of a suringing Atwood s machine. Amer. Jour. Phys., 1988. V. 56. P. 1117–1120.
4. *Griffiths D.J. Abbot T.A.* Comment on «A surprising mechanics demonstration» by A.R. Marlow. Amer. Journ. Phys. 1992. V. 60. P. 951–953.
5. *Кондратьев А.С., Уздин В.М.* Физика. Сборник задач. М: Физматлит, 2005.

Кондратьев Александр Сергеевич,
академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Методика обучения физике» РГПУ им. А.И. Герцена,

Ляпцев Александр Викторович,
доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Методика обучения физике» РГПУ им. А.И. Герцена,

Ситнова Елена Владимировна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Общая физика» Ивановского государственного университета.



Наши авторы, 2006.
Our authors, 2006.